

MATEMATICA III

CORSO DI LAUREA IN STATISTICA, ECONOMIA, FINANZA E ASSICURAZIONI
FACOLTÀ DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE, INFORMATICA E STATISTICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
A.A. 22/23

DOCENTE: DOTT. GIULIO GALISE

Cognome e nome:

Numero di matricola:

Prova scritta del 10.10.2023

Esercizio 1 (7 punti). Sia X l'insieme di definizione della funzione

$$f(x, y) = \frac{\log(4 - 4x^2 - y^2) - 1}{|x|e^{-y}}$$

- Rappresentare graficamente gli insiemi X , ∂X e \overline{X} .

Dire (senza giustificare la risposta) se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- X è aperto

V	F
-----	-----
- X è connesso

V	F
-----	-----
- $(0, 0) \in \partial X$

V	F
-----	-----
- $\mathbb{R}^2 \setminus X$ è limitato

V	F
-----	-----

Esercizio 2 (8 punti). Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = 2xe^{x^2} + xy^3 + 5.$$

(i) Determinare per quali direzioni \mathbf{v} risulta

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 1) = 1;$$

(ii) determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(0, 1, f(0, 1))$;

(iii) determinare una funzione $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{3}{2}x^2y^2. \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 3 (8 punti).

(i) Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = (y - x)e^{y-x}$$

nel triangolo chiuso

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

(ii) Determinare poi

$$\inf_C f, \quad \sup_C f$$

essendo C il semipiano chiuso

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$$

e stabilire se si tratta di massimo e minimo assoluti in C .

Esercizio 4 (9 punti). Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}.$$

(i) Calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2} dx dy.$$

(ii) Stabilire la validità della disuguaglianza

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2} dx dy > \iint_D \frac{x + x^3 + x^5 + x^7}{\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2} dx dy.$$